

Geometrija 3 rešenja roka septembar 2

1. Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, prirodno parametrizovana kriva koja u tački $s = 0$ ima krivinu κ_0 , torziju τ_0 i Freneov reper $[T_0, N_0, B_0]$. Definišimo krivu $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sa $\beta(t) = \alpha(0) + tT_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0N_0 + \frac{t^3}{6}\kappa_0\tau_0B_0$. Dokazati da su krivina, torzija i oskulatorna ravan krive β u tački $t = 0$ iste kao krivina, torzija i oskulatorna ravan krive α u tački $s = 0$.

Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= T_0 + t\kappa_0N_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0\tau_0B_0, & \beta'(0) &= T_0, \\ \beta''(t) &= \kappa_0N_0 + t\kappa_0\tau_0B_0, & \beta''(0) &= \kappa_0N_0, \\ \beta'''(t) &= \kappa_0\tau_0B_0 = \beta'''(0), \\ \beta'(0) \times \beta''(0) &= \kappa_0B_0,\end{aligned}$$

koristeći formule za proizvoljno parametrizovanu krivu dobijamo

$$\kappa(0) = \frac{\|\beta'(0) \times \beta''(0)\|}{\|\beta'(0)\|^3} = \kappa_0, \quad \tau(0) = \frac{[\beta'(0), \beta''(0), \beta'''(0)]}{\|\beta'(0) \times \beta''(0)\|^2} = \tau_0.$$

Kako je $\alpha(0) = \beta(0)$ i $B(0) = \frac{\beta'(0) \times \beta''(0)}{\|\beta'(0) \times \beta''(0)\|} = B_0$, oskulatorne ravni krivih α i β imaju iste vektore normale u istoj tački, pa se poklapaju.

2. Neka je $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ regularna površ čija je srednja krivina jednaka nuli $H = 0$ (minimalna površ).

- (a) Dokazati da su sve tačke na površi $\mathcal{M}$ hiperboličke ili planarne.
(b) Dokazati da u svim tačkama površi $\mathcal{M}$ koje nisu umbiličke postoje tačno dva asimptotska pravca, koji su međusobno normalni i polove uglove između glavnih pravaca.

Rešenje. Neka je $p \in \mathcal{M}$ proizvoljna tačka date minimalne površi. Kako je $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2} = 0$, dobijamo da je $\kappa_2(p) = -\kappa_1(p)$. Samim tim vidimo da su glavne krivine ili obe jednake nuli (u tom slučaju je tačka p planarna) ili su različitog znaka (u tom slučaju je tačka p hiperbolička). Takođe, tačka p je umbilička akko je $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$, odnosno akko je planarna, pa su neumbiličke tačke zapravo hiperboličke. U proizvoljnoj hiperboličkoj tački p uvek postoje tačno dva asimptotska pravca. Zaista, ako su e_1, e_2 glavni pravci u toj tački i $\theta \in (-\pi, \pi]$ usmereni ugao koji proizvoljni jedinični pravac $v_p = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ tangentne ravni u tački p zaklapa sa pravcem e_1 , koristeći Ojlerovu teoremu dobijamo da je normalna krivina površi $\mathcal{M}$ u tački p i pravcu vektora v_p jednaka

$$\kappa_n(v_p) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

Za asimptotski pravac v_p važi $\kappa_n(v_p) = 0$, pa iz prethodne formule dobijamo da važi $\kappa_1 \cos^2 \theta = -\kappa_2 \sin^2 \theta$, odnosno

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 1.$$

Rešenja ove jednačine su uglovi $\pm \frac{\pi}{4}$ (rešenja $\pm \frac{3\pi}{4}$ možemo isključiti jer daju isti pravac tangentne ravni kao i $\pm \frac{\pi}{4}$). Kako je uvek ispunjeno $e_1 \perp e_2$, upravo smo dokazali da postoje dva asimptotska pravca u tački p , koji su međusobno normalni i polove uglove između glavnih pravaca.

3. Dat je elipsoid $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$. Odrediti glavne, Gausovu i srednju krivinu elipsoida, kao i geodezijsku i normalnu krivinu paralela na datom elipsoidu.

Rešenje. Dati elipsoid je rotaciona površ dobijena rotacijom poluelipse $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, $x > 0$, u xz -ravni, oko z -ose. Jedna moguća parametrizacija (dela) datog elipsoida je

$$r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, 2 \sin u), \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad v \in (0, 2\pi).$$

Koeficijenti prve i druge fundamentalne forme glase:

$$r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 2 \cos u), \quad r_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

$$r_u \times r_v = (-2 \cos^2 u \cos v, -2 \cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u), \quad n = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u + 4 \cos^2 u}}(-2 \cos u \cos v, -2 \cos u \sin v, -\sin u),$$

$$r_{uu} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -2 \sin u), \quad r_{uv} = (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0), \quad r_{vv} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, 0)$$

$$[\text{I}] = \begin{pmatrix} \sin^2 u + 4 \cos^2 v & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}, \quad [\text{II}] = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 u + 4 \cos^2 u}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Glavne krivine su sopstvene vrednosti matrice

$$[\mathbf{I}]^{-1} \cdot [\mathbf{II}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{(\sin^2 u + 4 \cos^2 u)^3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\sin^2 u + 4 \cos^2 u}} \end{pmatrix},$$

pa iznose $\kappa_1 = \frac{2}{\sqrt{(\sin^2 u + 4 \cos^2 u)^3}}$, $\kappa_2 = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 u + 4 \cos^2 u}}$. Gausova krivina elipsoida iznosi $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{4}{(\sin^2 u + 4 \cos^2 u)^2}$, a srednja krivina $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\sin^2 u + 4 \cos^2 u + 1}{\sqrt{(\sin^2 u + 4 \cos^2 u)^3}}$.

Paralele su krive $u = u_0 = \text{const}$ i imaju jednačinu $\alpha(v) = (\cos u_0 \cos v, \cos u_0 \sin v, 2 \sin u_0)$, $v \in (0, 2\pi)$. Kako su to kružnice poluprečnika $\cos u_0$, njihova prirodna parametrizacija je

$$\alpha(s) = \left(\cos u_0 \cos \frac{s}{\cos u_0}, \cos u_0 \sin \frac{s}{\cos u_0}, 2 \sin u_0 \right), \quad s \in (0, 2\pi \cos u_0).$$

Sada lako dobijamo

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{\cos u_0}, \cos \frac{s}{\cos u_0}, 0 \right), \\ \alpha''(s) &= \left(-\frac{1}{\cos u_0} \cos \frac{s}{\cos u_0}, -\frac{1}{\cos u_0} \sin \frac{s}{\cos u_0}, 0 \right), \\ n(s) &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u_0 + 4 \cos^2 u_0}} \left(-2 \cos u_0 \cos \frac{s}{\cos u_0}, -2 \cos u_0 \sin \frac{s}{\cos u_0}, -\sin u_0 \right), \end{aligned}$$

pa su geodezijska i normalna krivina krive α jednake

$$\begin{aligned} \kappa_g &= [n(s), T(s), \alpha''(s)] = \frac{-\text{tg } u_0}{\sqrt{\sin^2 u_0 + 4 \cos^2 u_0}}, \\ \kappa_n &= \langle n(s), \alpha''(s) \rangle = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 u_0 + 4 \cos^2 u_0}}. \end{aligned}$$

4. Dat je parabolički cilindar svojom parametrizacijom $r(u, v) = (u^2, u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Dokazati da je dati cilindar izometričan ravni i odrediti najmanje rastojanje između tačaka $(0, 0, 0)$ i $(1, 1, 1)$ mereno po cilindru. (Možete koristiti $\int \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2 + 1} + \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right) + \text{const.}$)
- (b) Odrediti sve geodezijske linije na datom cilindru.

Rešenje. Koeficijenti prve fundamentalne forme date površi dati su matricom

$$[\mathbf{I}]_r = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tangentna ravan π cilindra duž izvodnice $u = 0$ (z -ose) je ravan $x = 0$, koju je najlakše parametrizovati sa

$$f(y, z) = (0, y, z), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Formule izometrije najlakše ćemo dobiti "otvaranjem" datog cilindra na ravan π . u -parametarske krive $v = v_0$ su parabole $r(u, v) = (u^2, u, v_0)$, pa se lako dobija da je rastojanje tačke $r(u, v)$ od odgovarajuće tačke $(0, 0, v)$ na z -osi jednako $\int_0^u \sqrt{4t^2 + 1} dt = \frac{1}{4} (2u\sqrt{4u^2 + 1} + \ln(2u + \sqrt{4u^2 + 1}))$. Prema tome, tačka $r(u, v)$ se pri pomenutom "otvaranju" cilindra na ravan slika u tačku $f(\frac{1}{4}(2u\sqrt{4u^2 + 1} + \ln(2u + \sqrt{4u^2 + 1})), v)$, pa su formule tražene izometrije

$$y = \frac{1}{4} (2u\sqrt{4u^2 + 1} + \ln(2u + \sqrt{4u^2 + 1})), \quad z = v.$$

Lako se proverava da reparametrizovana ravan π

$$\tilde{f}(u, v) = (0, \frac{1}{4} (2u\sqrt{4u^2 + 1} + \ln(2u + \sqrt{4u^2 + 1})), v)$$

ima iste koeficijente prve fundamentalne forme kao i dati cilindar $[\mathbf{I}]_r = [\mathbf{I}]_{\tilde{f}}$. Tačkama $A(0, 0, 0)$ i $B(1, 1, 1)$ odgovaraju vrednosti parametara $(u, v) = (0, 0)$, $(y, z) = (0, 0)$, odnosno $(u, v) = (1, 1)$, $(y, z) = (\frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}, 1)$. Kako izometrija između površi čuva rastojanje između tačaka (mereno duž površi), traženo rastojanje iznosi $\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}\right)^2 + 1}$.

Jedini Kristofelov simbol različit identički od nule je $\Gamma_{11}^1 = \frac{4u}{4u^2+1}$, pa se sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ (s je prirodni parametar) svodi na

$$\begin{aligned} u'' + \frac{4u}{4u^2+1}(u')^2 &= 0, \\ v'' &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine sledi da je $((4u^2+1)(u')^2)' = 2(4u^2+1)u'u'' + 8u(u')^3 = 0$, odnosno $(4u^2+1)(u')^2 = \text{const}$, odakle je

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{A}{\sqrt{4u^2+1}}, \quad A = \text{const}.$$

Iz druge jednačine sledi da je $v' = \frac{dv}{ds} = B = \text{const}$, pri čemu je zbog prirodne parametrizacije krive α veza između konstanti $A^2 + B^2 = 1$. Deljenjem prethodne dve jednačine (uz uslov $u' \neq 0$) dobijamo $\frac{dv}{du} = C\sqrt{4u^2+1}$, $C = \text{const}$. Integracijom odmah sledi da je (uz napomenu da $\frac{C}{4}$ menjamo sa C)

$$v = C(2u\sqrt{4u^2+1} + \ln(2u + \sqrt{4u^2+1})) + D, \quad C, D = \text{const}.$$

Krive $u' = 0$ su izvodnice cilindra, pa su i one trivijalno geodezijske linije. Drugi način je da iskoristimo prvi deo zadatka i važnu činjenicu da izometrije površi čuvaju geodezijske linije. Geodezijske linije na datom cilindru su slike pravih u ravni π , pa se lako vidi iz dobijenih formula izometrije da dobijamo isti rezultat.